

応力集中について

松井源吾

早稲田大学理工学研究所報告第100輯記念特集号抜刷

昭和57年10月

応力集中について

松井源吾*

材中に孔があるなど形状変化があると、その近傍で応力の乱れや集中が起る。また、集中荷重の作用点近傍でもこのような現象が見られる。本文では筆者の研究を中心にこれらの応力集中についての研究の概要をのべる。

戦後最初の建築学会大会は昭和21年11月であった。筆者は曲げをうける梁の円孔の応力について発表した¹⁾。曲げをうける梁の中立軸に円孔のある場合についてはすでに辻二郎博士の解があり(1930年)、また引張りの場合は古く(1898年) Kirsch の解がある。この二つの解を重ね合せれば、中立軸でない位置にある場合の解が得られる。しかし、この二つの解は極座標によるもので、梁の上下の直線縁の境界条件を満足していない。筆者はこの場合について双極座標を用いて解を求めた。双極座標は

$$x+iy=ia \coth\{(\alpha+i\beta)/2\} \quad 2a \text{ は極の間隔}$$

で表される写像である。 $\alpha = \text{const}$ はアポロニウスの円群であり、 $\alpha = 0$ は直線であって、直線と円が接近してある場合に好都合な座標である。この座標をはじめて弾性論で用いたのは Jeffery で、直線縁に近く円孔のある場合の引張りの解を得ている(1920年)。曲げの場合の筆者の解の数値例を図示する。Fig. 1 は孔周と直線縁の応力であり、Fig. 2 は孔の頂点の応力値を種々の場合について示している。

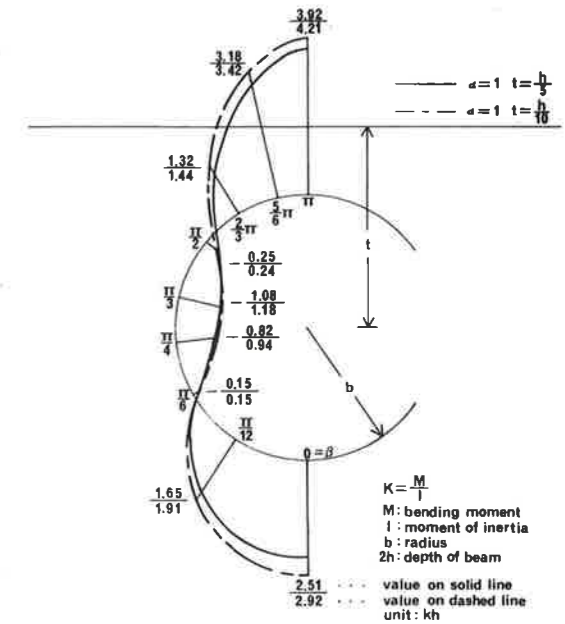


Fig. 1 (a) Bending Stress of Beam with Circular Hole Close to its Straight Boundary (Stress Distribution around Hole)

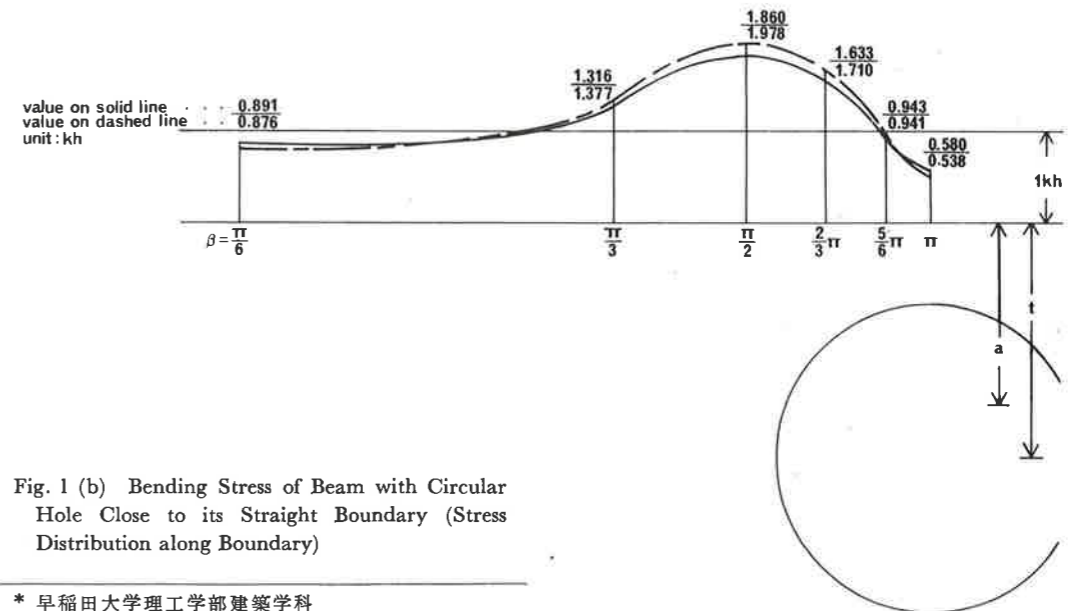


Fig. 1 (b) Bending Stress of Beam with Circular Hole Close to its Straight Boundary (Stress Distribution along Boundary)

* 早稲田大学理工学部建築学科

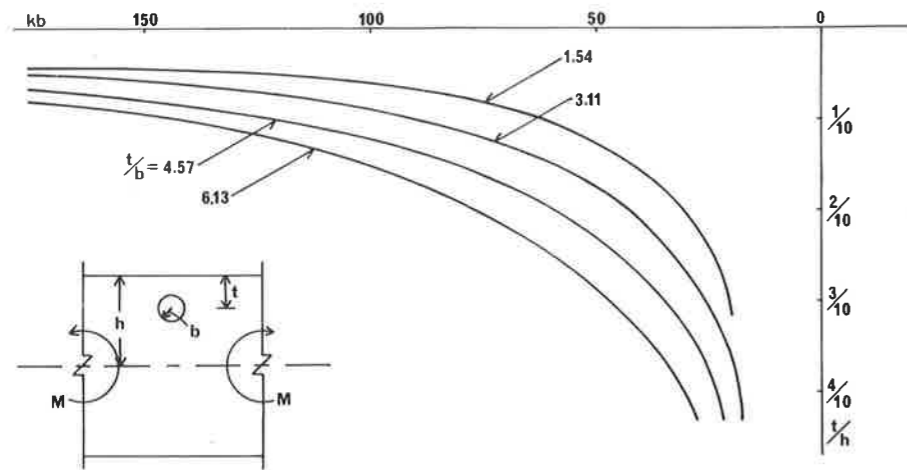


Fig. 2 Influence of Circular Hole Location on Stress Quantity at Apex of Hole

この曲げの解は二項よりなり、梁成が大きい条件を入れると一項が消えて引張りの解となる。Mindlineがやはりこの座標を用いてトンネルの解を出しているが(1939年),その論文の中で Jeffery の引張りの解の間違いを指摘している。しかし、訂正解は求めていない。筆者はその Jeffery の解の訂正も目的であった。所が、昭和21年8月号の機械学会誌に東大機械の鶴戸口英善助教授がその引張りの解を発表された。少々がっかりしたものであるが、曲げについてはふれられていないので上記の論文を11月に発表したのである。鶴戸口先生は独自にJefferyの間違いを見いだされたのであるが、発表後土木の最上武雄助教授から Mindline の指摘を聞かれたということである。ともかくはじめての解である。先生はその後の解を種々の場合に発展的に応用されている。Timoshenko の Theory of Elasticity の初版には Jefferyの解の数値例が示されていたものであるが、第2版(1951年)以後ではこれを削除している。それが Mindlinによるものか、鶴戸口先生によるものかわからない。

複合材である鉄筋コンクリート部材を単一の弾性体で考える時、軸力の場合には歪が等しいとして鉄筋がヤング率倍効く等価断面を考えているが、他の応力状態の時については考察されていない。例えば耐震壁における弾性範囲での鉄筋の作用は不明であった。

筆者は鉄筋コンクリート材のせん断についてその解²⁾を求め、応力分布、鉄筋の効果などを調べ、単一材に置換の場合を考察した。断面を xy, z を軸方向とし、変位を次のようにおいた。

$u=0 \quad v=yz \quad w=\varphi(x, y) \quad \gamma$: せん断歪
 φ は複素函数の実部である。鉄筋とコンクリートは、変形後も離れないことを条件として解いた。Fig. 3はその解の結果の鉄筋周辺の応力である。鉄筋とコンクリートのせん断弾性係数の比を9とすると、最大応力は平均応力の1.8倍となる。鉄筋による影響はその周辺で応力が増す部分があるが減る部分もある。鉄筋から充分離れた範囲でこれらの合計を出すと、増と減はほとんど同じであって、軸方向鉄筋はせん断に貢献しないといえる。したがって、耐震壁の剛性は弾性範囲ではコンクリートだけを考えればよいのである。

また、鉄筋の接近した場合、鉄筋が壁の縁に近い場合について、前記の双極座標を用いて解いた。その結果によれば、鉄筋径の3倍以上離れていれば近づいたことの影響は消えることが判った。

これらの双極座標の解に鉄筋のせん断弾性係数をゼロとおくと孔のあいた解となる。後に入江善久君が中空スラブ(孔あき床)のせん断の場合にこれを用いている³⁾。Fig. 4のようにこの場合は、孔の接近により応力集中はかえって減少するのである。

せん断と同様の方法で鉄筋コンクリート材の振りについても解を求めた²⁾。この場合の変位は

$u=-\omega yz \quad v=\omega xz \quad w=\omega\varphi(x, y) \quad w$: 振れ角
 としている。その解によれば、鉄筋のないときその場所に起るせん断応力の1.8倍の応力集中が起き、せん断の場合と同じである。この解で振りモーメントを算出すると軸方向鉄筋はあまり効かずコンクリートだけのものに

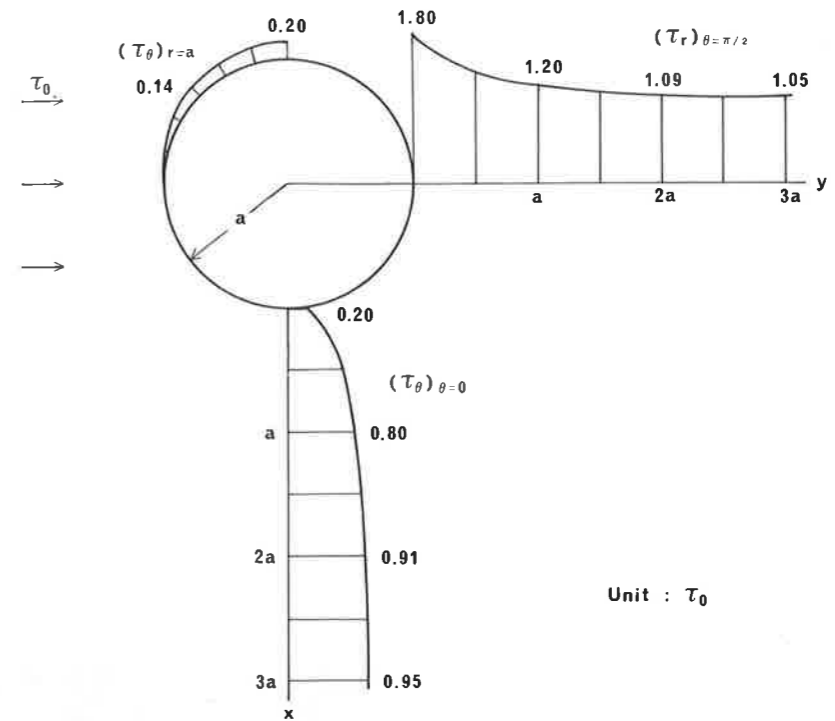


Fig. 3 Stress Distribution in Vicinity of Steel Reinforcement in Reinforced Concrete due to Shear Force

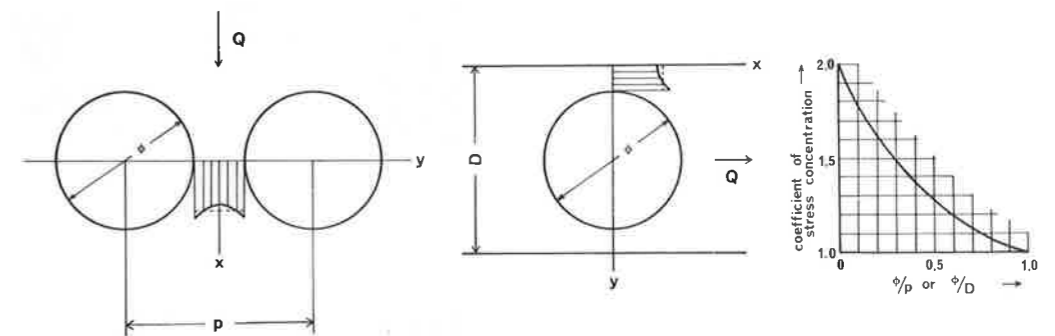


Fig. 4 Shear Stress Distribution of Hollow Slab

ほぼ等しい。常識的な寸法の円柱を仮定して振りモーメントを数値計算してみると鉄筋の効果は2.5%にすぎなかった。振りモーメントについては Föpl の式というのがあるが、それによるとこの例では12.5%と大分大きい値となる。Föpl は変形後も断面が平面を保つと仮定しているが、これは間違いである。

耐震壁は内藤多伸博士が大正11年に提唱されたが、翌12年の関東大震災に博士設計の建物が無被害でその効果を実証されて以来、わが国のほとんどの建築に用いられ

て来た。それに従って多くの研究がなされているが、開口のある耐震壁についての研究は少ない。

筆者は次の写像

$$x+iy=a(3e^w-0.5e^{-8w}) \quad w=\alpha+ib$$

にて、 $\alpha=0$ が隅をまるめた近似正方形を表わすことを利用し、これを曲線座標として用い、正方形開口のある耐震壁の解を横田方程式により求めた⁴⁾。境界条件としては、耐震壁が梁柱の架構に囲まれているとし、壁の外側の変形を横力をうけたラーメンの形に仮定した。この

解による開口周辺の応力の計算例を Fig. 5 に示す。開口隅の応力集中は大きい、これを離れると急激に減少する。これらの解より得た応力で、開口補強筋の必要量を調べている。更に解から変位を導き、開口の大小による剛性低下率を求めている (Fig. 6)。

この解の検討のため、光弾性実験を行った。架構には鋼製の枠を作り、壁のフェライト板には開口があり、この試験体を45°傾けて、上下に押し、左右に引張って純せん断を与えた。開口の正方形は段々削って大きくして行った。応力測定の結果は、解より得られた応力とほぼ一致した (Phot. 1)。

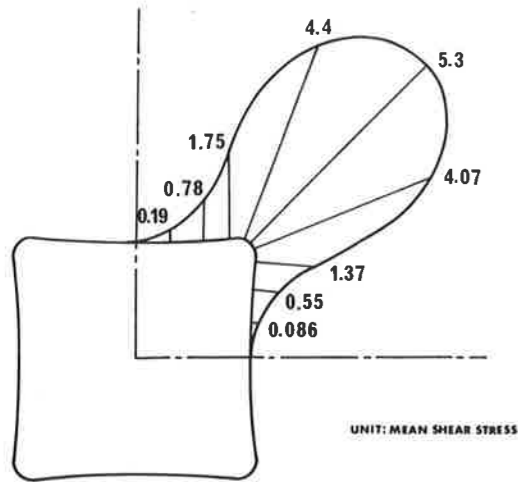


Fig. 5 (a) Stress Distribution of Shear Wall with Square Opening (Stress Distribution around Opening)

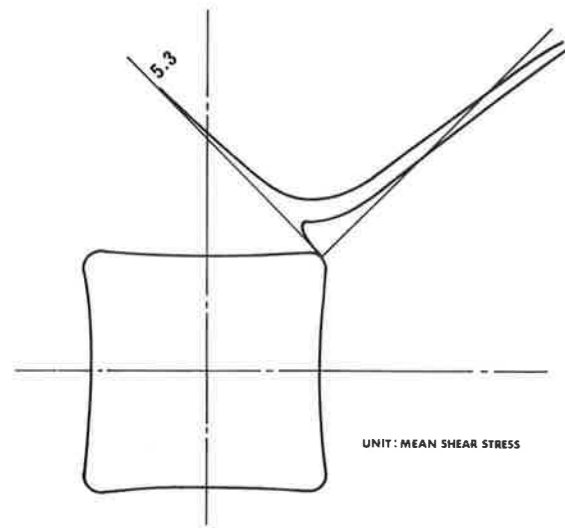


Fig. 5 (b) Stress Distribution of Shear Wall with Square Opening (Stress at Corner of Opening)

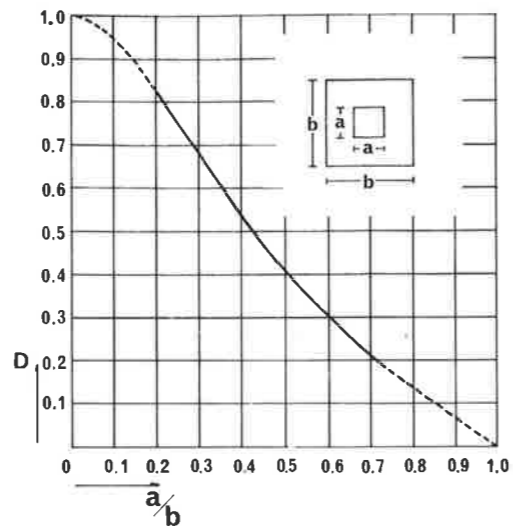
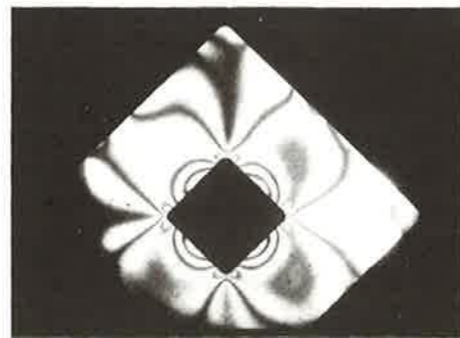
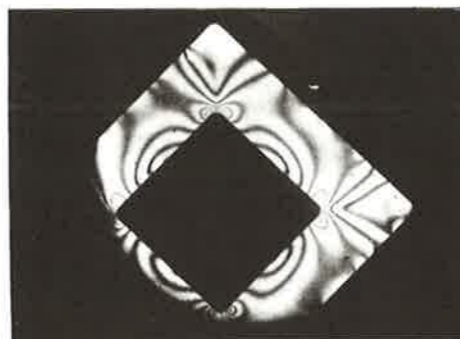


Fig. 6 Stiffness Decreasing Rate of Shear Wall due to Opening



Phot. 1 (a) Isocromatic Fringes of Photoelasticity for Shear Wall with Square Opening Subjected to Shear Force (for Small Window)

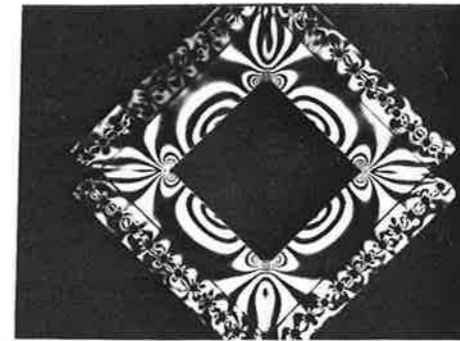


Phot. 1 (b) Isocromatic Fringes of Photoelasticity for Shear Wall with Square Opening Subjected to Shear Force (for Large Window)

たものである。円筒のせん断応力最大の位置に正方形孔のあるときの解の計算例を Fig. 7 に示す。実在の鉄筋コンクリート煙突と同じ寸法比率の鋼パイプでの実験値を白丸、黒丸で示しているが、かなり近似している。

開口のある耐震壁の研究は瀬谷胖君により引き継がれた⁶⁾。境界条件は筆者の場合とほぼ同じであるが Muskhelishvili の方法 (1963年) をとり入れ、より正確な解を求めている。筆者が主として開口周辺の垂直応力を調べているのに対し、この論文は主としてせん断応力を調べている。Fig. 8 は開口壁全体のせん断分布を示したもので、解から得られたせん断応力を濃淡で表わしている。開口の上下左右の開口を少し離れた所にせん断応力の増大部分がある。この範囲はかなり広く、最終破壊の原因となっている。更に、長方形開口についても解を求めている。

この種の問題の応用として、正方形開口内に筋違のある場合について難波治之君が解いている⁷⁾。その解は光弾性実験 (Phot. 2) とよく一致している。



Phot. 1 (c) Isocromatic Fringes of Photoelasticity for Shear Wall with Square Opening Subjected to Shear Force (from Recently-Published Bachelor's Thesis)

最近、筆者はこの座標で円筒の開口部周辺応力の略解を求めた⁶⁾。開口が小さく筒の肉厚が薄いと、円筒を開いて平板としても誤差は少ないであろう。円筒の場合の応力分布をそのまま開いて平板として与え、これを解い

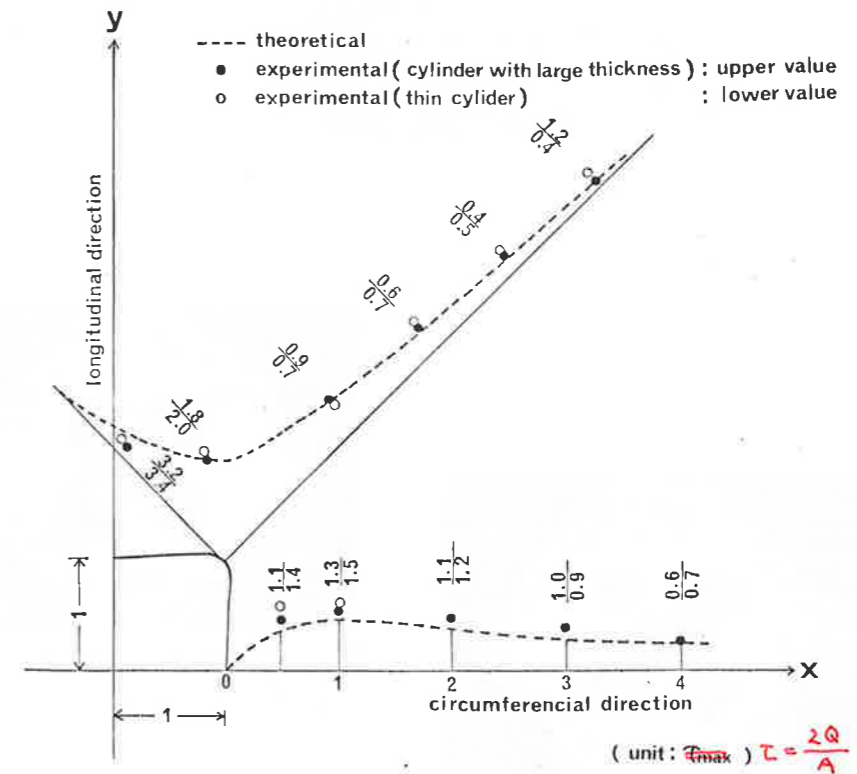


Fig. 7 Stress Distribution of Smokestack Subjected to Shear Force

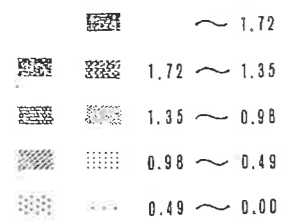
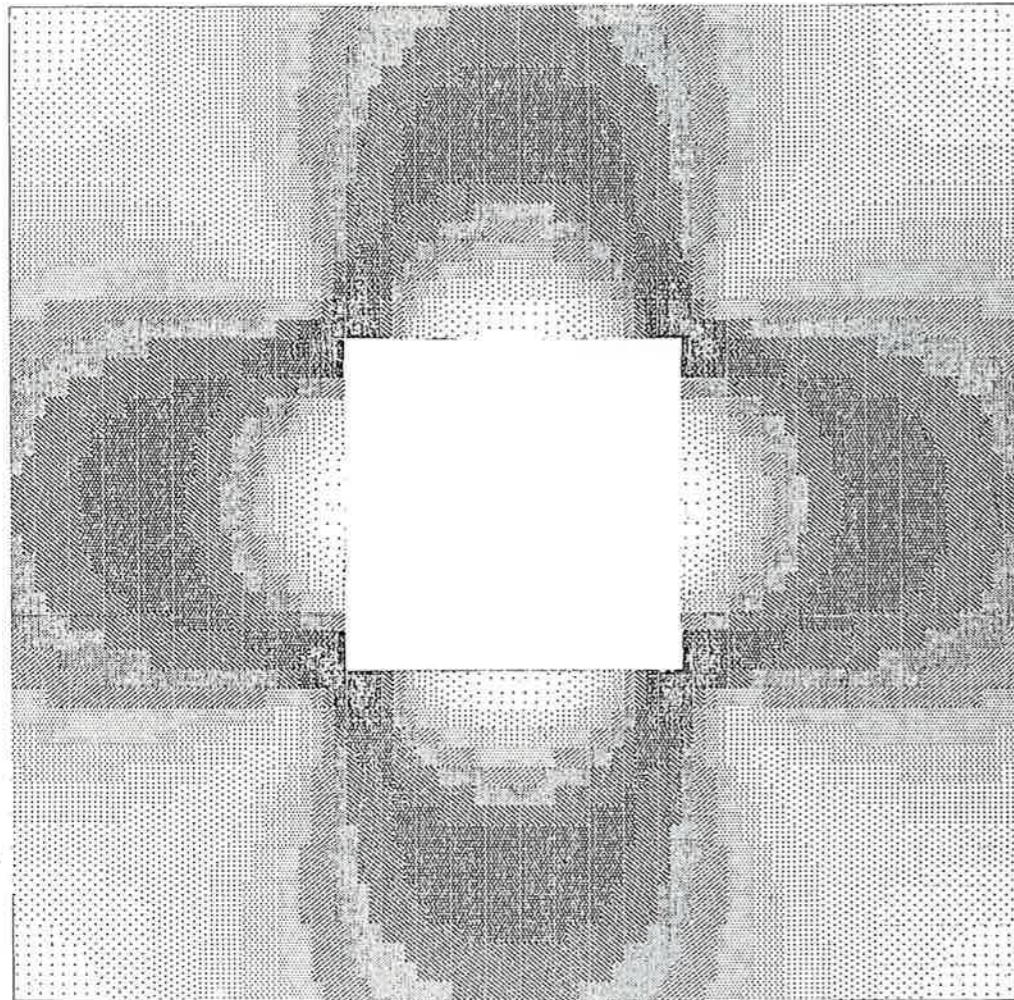
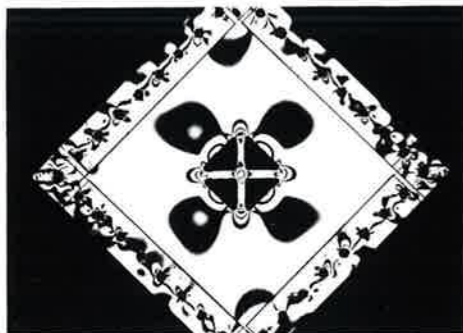
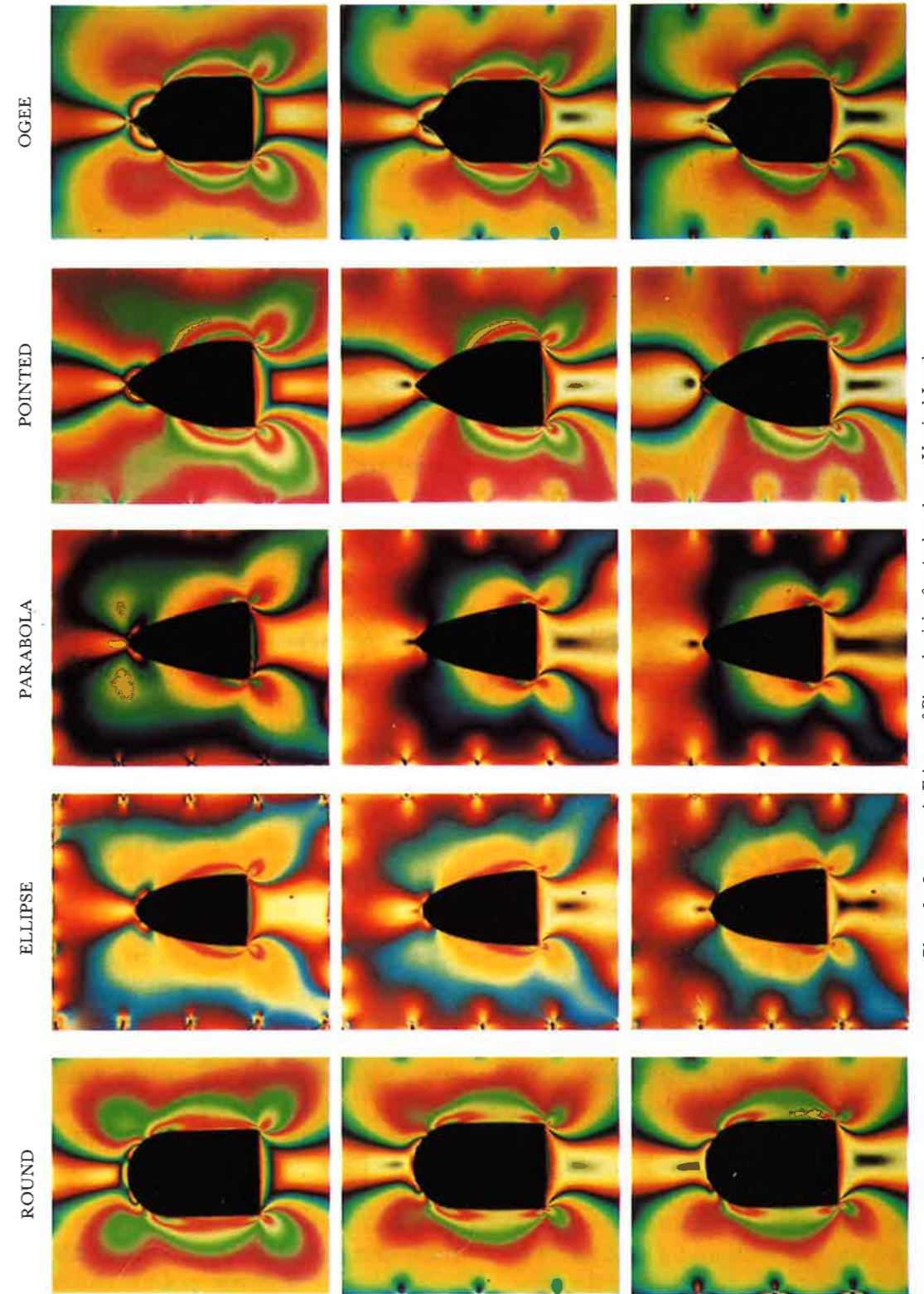


Fig. 8 Shear Stress Distribution of Shear Wall with Opening



↑ Phot. 2 (b) Isocromatic Fringes of Photoelasticity for \diamond -shaped Bracings in Square Opening Subjected to Shear Force

← Phot. 2 (a) Isocromatic Fringes of Photoelasticity for X-shaped Bracings in Square Opening Subjected to Shear Force



Phot. 3 Isocromatic Fringes of Photoelasticity for Arches due to Vertical Loads

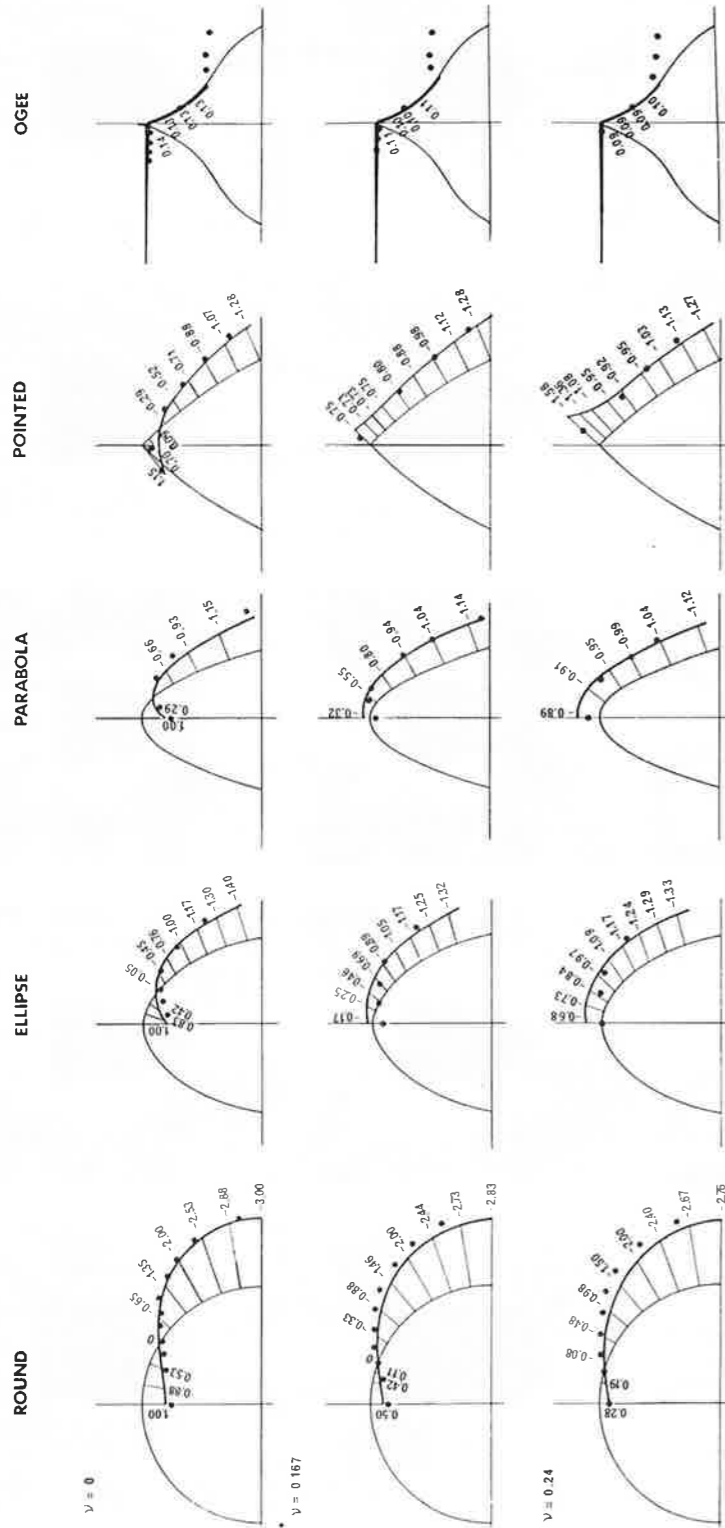


Fig. 9 Theoretical and Experimental Stress Distributions around Arched Openings of Wall

筆者の最近の研究として面としてのアーチの応力がある⁹⁾。アーチは古来、石造や煉瓦造に用いられて来たが、近來コンクリート造にも用いられている。その使われ方は石造や煉瓦造でもアーチ回りの材はアーチと一体となっており、コンクリートの場合は勿論そうである。ところがアーチの解析は線的に取扱われ面として解析されていない。この論文はアーチ孔のある平板が外力をうける時の応力を二次元弾性論の問題として解析し、光弾性実験も行っている。写像は次式とする。

$$x+iy=R\left(\frac{1}{\zeta}+a_1\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+a_4\zeta^4\right)$$

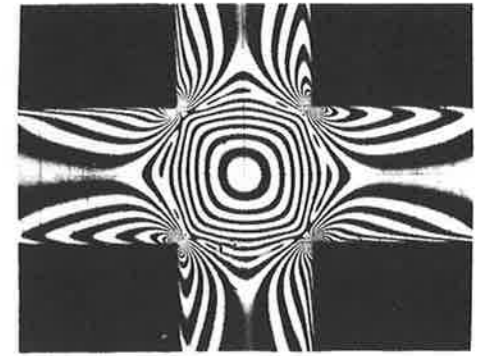
$$\zeta=\rho e^{i\theta}$$

ここに R は写像の倍率で、 $a_1 \sim a_4$ の値を適当にえらぶと、Round, Ellipse, Parabola, Pointed, Ogee の 5 種類のアーチの形を表すことができる。解法は Mushkeli-shvili の方法に依った。荷重は等分布鉛直荷重とし、横方向が拘束されない場合とされる場合について解を求めた。光弾性写真 (Phot. 3) の上段は横の拘束のない時、中段はポアソン比 0.167 (コンクリート) の拘束のある時、下段はポアソン比 0.24 (石、煉瓦) の拘束のある時である。頂部開口周の応力の理論値と実験値を Fig. 9 に示す。一般に横の拘束がないとアーチ頂部に引張り応力が生ずるが、拘束があるとその引張り応力の値が減るか、圧縮応力になる。Ellips, Parabola, Pointed は有利な形であり拘束があると引張り応力は生じない。Round はこれらについて有利な形ではあるが、ポアソン比 0.24 でも頂部に引張り応力が生じている。石造や煉瓦造の Round Arch が崩壊しないのは Key Stone がプレストレスとしてアーチ材に圧縮応力を与えているのではないかとと思う。

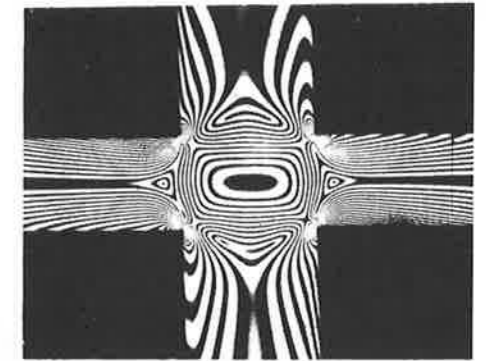
この文のはじめに荷重が集中するときも応力集中が起こるとのべたが、梁柱の接合部もそれに当る。地震時の接合部の光弾性 (Phot. 4) によると、接合部の隅に高い応力集中があり、また、接合部中央に高次の縞が生じせん断応力が大きい。この状態は梁、柱と接合部パネルとの境界線上の曲げ応力は、通常の三角形分布でなく、Hyperbolic Sine 的な分布が想像される⁹⁾。

大越俊男君は、この境界線上の応力分布を弾性理論で求め、光弾性で実証している¹⁰⁾。鉄筋コンクリートでは、接合部の隅の応力集中は主筋が交差しており問題はないが、接合部中央のせん断応力増大は、通常この部分は補強されないで、斜め亀裂の発生、建物の崩壊につながるおそれがあり、重要である。

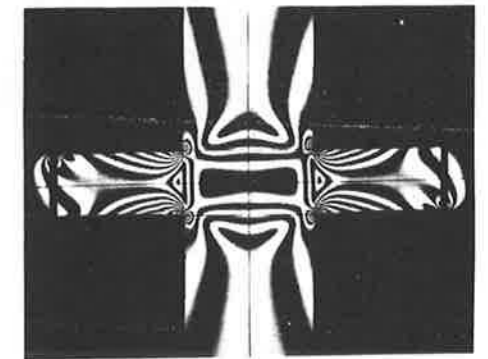
この接合部せん断応力増大の原因は、上下の柱からの



a) Width of Column: Depth of Beam=1 : 1



b) Width of Column: Depth of Beam=1 : 1/2



c) Width of Column: Depth of Beam=1 : 1/3

Phot. 4 Isocromatic Fringes of Photolasticity for Beam-Column Joint under Seismic Loads

モーメントが同方向で、その影響が重なるからである。柱をずらすことができればこれが減少するが、通常の場合不可能である。ところが壁式構造ならば柱荷重が小さいので可能である。すなわち、くいちがい窓配置である¹¹⁾。

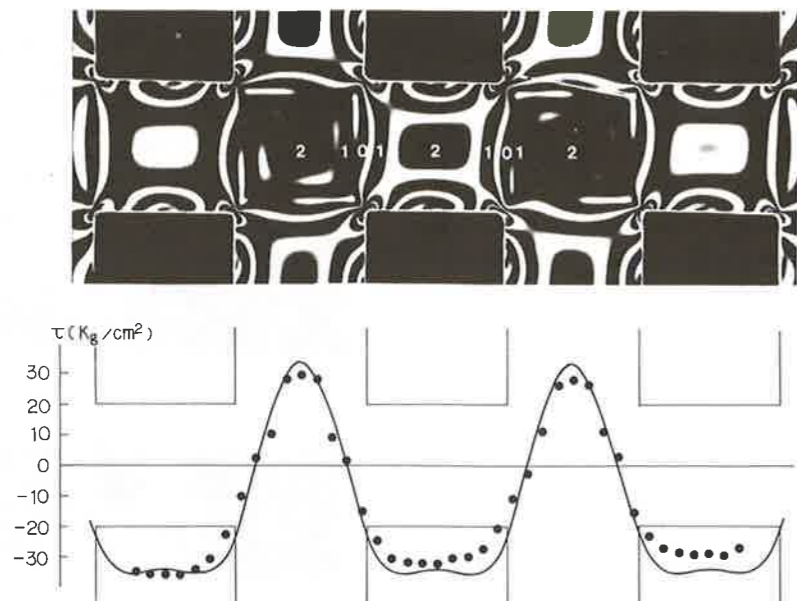


Fig. 10 Photoelastic Isochromatic Fringe Orders and Shear Stress Distribution of Wall with Windows Arranged in Regular Order

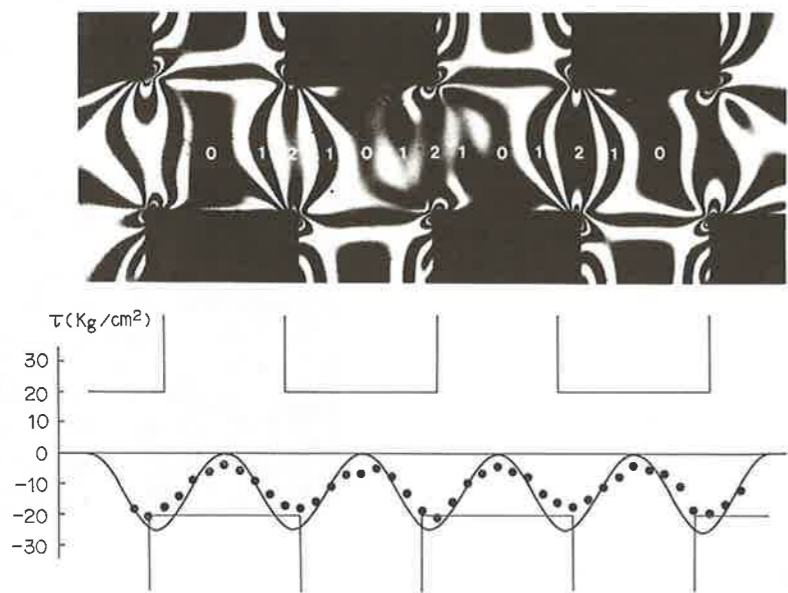
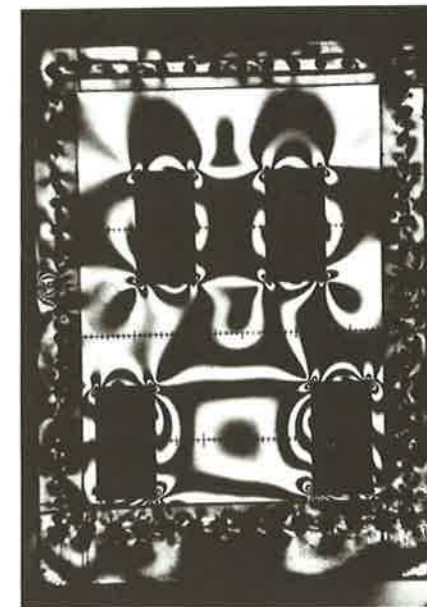


Fig. 11 Photoelastic Isochromatic Fringe Orders and Shear Stress Distribution of Wall with Windows Alternately Arranged



Exterior wall



Interior Wall

Phot. 5 Isochromatic Fringes of Photoelasticity for Exterior and Interior Walls of Building No. 65 of School of Science and Engineering, Waseda University under Seismic Loads

Fig. 10, 11は窓が並んだ場合とくいちがった場合の地震時せん断応力分布である。黒点は光弾性の値、曲線は理論値である。柱からの曲げとせん断を梁に対してフーリエ級数の形で荷重として与え解いている。くいちがいによる効果は大きい。理工学部65号館も壁式構造で、外壁、内壁ともにこの形式である (Phot. 5)。

応力が集中する所では変位も局部的に増加する。半無限板の直線縁に曲げが加わるとその点で直線縁は傾斜するが、その傾斜は曲げ応力の分布状態によって違った値となる。筆者の計算¹²⁾では集中荷重としたときと三角形分布とした時では3倍違うのである。坪井善隆君はこの考察から出発した所謂剛域を研究した¹³⁾。例えば梁の端で回転があるから梁の実長より「少し長い」梁を仮定し、その先で固定と考えるのである。この「少し長い」長さを通常成域の0.25倍としている。坪井君の弾性解、光弾性実験、更に有限要素法の結果によればこれは0.43倍にしなくてはならないことが判った。

文を終るに当たり、多くの研究協力者に感謝すると共に、随分長い年月、似たような問題を続けたものだと思っている次第である。

参考文献

- 1) 松井源吾, 「小円孔を有する梁の曲げモーメントを受ける場合の解」, 日本建築学会大会学術講演, (1946, 11).
- 2) 松井源吾, 「鉄筋コンクリート材の振りおよびせん断について」, 日本建築学会論文集, 第43号 (1951, 7).
- 3) 入江善久, 「中空スラブのせん断性状に関する研究 (その1)」, 日本建築学会論文報告集, 第213号 (1973, 11).
- 4) Matsui, "Theoretical Study on Seismic Distribution Coefficient and Steel Reinforcement for Wall with one Opening Subjected to Earthquake Shear", 早稲田大学理工学部紀要, 第15号 (1951, 12).
- 5) 松井源吾, 「円筒の開口部周辺応力の略解」, 日本建築学会論文報告集, 投稿中.
- 6) 瀬谷 胖, 松井源吾, 「開口のある耐震壁の応力と変形に関する研究 (その1)」, 日本建築学会論文報告集, 第286号 (1979, 12).
- 7) 難波治之, 佐藤勝利, 「開口の筋違補強の研究 (その1)」, 日本建築学会論文報告集, 第296号 (1980, 10).
- 8) Matsui, "Stresses around Arched Openings of Wall", 日本建築学会論文報告集, 投稿中.
- 9) 松井源吾, 「材料力学」(彰国社, 1967) p. 129

- ～p. 131.
- 10) Matsui, Ohgoshi, "Stress Analysis of +Type Beam-Column Conection", (I) 日本建築学会論文報告集第168号 (1970. 2), (II) 日本建築学会論文報告集第169号 (1970. 3), (III) 日本建築学会論文報告集第176号 (1970. 10).
- 11) 松井源吾, 小川隆久, 「壁式構造における窓の配置とせん断応力分布に関する研究」, 日本建築学会論文報告集, 第286号 (1979. 12).
- 12) 松井源吾, 「材料力学」, (彰国社, (1967) p. 131～p. 133.
- 13) 松井源吾, 坪井善隆, 「壁式構造の解法の基礎的研究 (その1)」, 日本建築学会論文報告集, 第249号 (1976. 11).

正 誤 表

頁・行	誤	正
p. 45 Fig. 7	(Unit: τ_{max})	(Unit: $\tau = 2Q/A$)
p. 51 左下より6行目	成 域	梁 成
p. 43 ~ 51上	応用集中について	応力集中について